

文章编号: 1001-3679(2006)02-0205-05

分形理论及其应用

刘莹, 胡敏, 余桂英, 李小兵, 刘晓林

(南昌大学机电工程学院, 江西 南昌 330029)

摘要: 分形理论是现代非线性科学中的一个重要的分支, 是科学研究中一种重要的数学工具和手段。介绍了分形理论的基本概念, 给出了分形理论的重要参数分形维数的几种常见定义和计算方法。重点介绍了分形理论在从自然科学到社会科学的各个领域, 如工程技术、物理、化学、生物医学、材料科学、天文地理、经济管理、计算机图形学等学科领域的应用及其最新的进展情况。最后, 展望了分形理论的应用前景及其发展方向, 提出分形理论将面临和有待解决的问题。

关键词: 分形理论; 分形维数; 应用状况

中图分类号: TB14 TH3 N32

文献标识码: A

Theory of Fractal and its Applications

LIU Ying HUM in YU Gui Ying LIXiao bing LIU Xiao lin

(Mechanical and Electronic Engineering School Nanchang University Jiangxi Nanchang 330029 PRC)

Abstract: Fractal theory is a branch of nonlinear science and an important means for science research. This paper introduces the basic concept and several calculating methods of fractal dimension as a main parameter of fractal theory. Primarily, it is summarized that fractal theory have been used in various fields from nature science to social science such as engineering, physics, chemistry, biomedicine, material science, astronomy and geography, economy and management, computer graphics, etc. In the end, the foreground and developmental orientation of fractal theory is prospected and problems in face of fractal theory is advanced.

Key words: Fractal theory; Fractal dimension; Application

分形理论作为一种新的概念和方法, 正在许多领域开展应用探索。80年代初国外开始的“分形热”经久不息, 并且在各个领域发挥重要的作用。美国著名物理学家惠勒说过: “今后谁不熟悉分形, 谁就不能被称为科学上的文化人。”

1 分形理论的介绍

1.1 分形的定义

分形(Fractal)一词, 是1973年曼德勃罗(B

B Mandelbrot)^[1]由拉丁语 Frangere一词创造而成的, 其原意具有不规则、支离破碎等意义, 分形几何学是一门以非规则几何形态为研究对象的几何学。由于不规则现象在自然界是普遍存在的, 因此分形几何又称为描述大自然的几何学。但目前分形还没有一个确切的定义, 分形是对没有特征长度但有某种意义下的自相似性的形体和结构的总称。

1.2 分形的判定方法

收稿日期: 2005-07-04 修订日期: 2006-02-22

作者简介: 刘莹(1957-)女, 江西南昌人, 博士生导师, 教授, 主要从事微机械与微摩擦学研究。

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50275071); 南昌大学科研基金项目(02879)。

目前,判断分形与非分形,尚无确定的方法,国内外学者所采用的方法大致有:(1)人工判定法;(2)相关系数检验法;(3)强化系数法;(4)拟合误差法;(5)分维值误差法;(6)总体拟合法等。

1.3 分形维数的定义

分形维数是描述分形的重要参数,能够反映分形的基本特征,但由于侧重面不同,有多种定义和计算方法。常见的有相似维数、豪斯道夫维数、容量维数、计盒维数等,它们有各自不同的应用。以下介绍几种常见的定义^[3]。

1.3.1 相似维数 D_s 一般来说,如果某图形是由把原图缩小为 $1/r$ 的相似的 N 个图形组成,则有:

$$N = r^{D_s} \quad D_s = \log N / \log r \quad (1)$$

的关系成立,则指数 D 称为相似维数, D 可以是整数,也可以是分数。相似维数,通常被定义为具有严格自相似性的维数。

1.3.2 容量维数 D_c 容量维数是利用相同大小形状的小球或立方体包覆几何对象而定义的维数,由著名苏联数学家科尔莫哥诺夫提出的。

设一几何对象 S 若用直径为 ϵ 的小球为标准去覆盖 S 所需的小球的最小数量为 $N(\epsilon)$, 则 S 的容量维数为:

$$D_c = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log(1/\epsilon)} \quad (2)$$

1.3.3 豪斯道夫 (Hausdorff) 维数 D_H 设一个整体 S 划分为 N 个大小和形态完全相同的小图形,每一个小图形的线度是原图形的 $1/r$ 倍,则豪斯道夫维数为:

$$D_H = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(r)}{\log(1/r)} \quad (3)$$

豪斯道夫维数和容量维数都是基于包覆的,其不同点在于容量维数是用相同大小形状的球或立方体去作包覆定义维数,而豪斯道夫维数是用最有效的包覆来定义的维数。

1.3.4 信息维数 D_i 将空间作等分分割,然后根据进入这些子空间中点的概率来定义的维数,称为信息维数。

若考虑在豪斯道夫维数中每个覆盖 S 中所含分形集元素的多少,并设 P_i 表示分形集的元素属于覆盖 S 中的概率,则信息维数为:

$$D_i = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N P_i \log P_i}{\log \epsilon} \quad (4)$$

在等概率的情况下,信息维数等于豪斯道夫

维数。

1.3.5 计盒维数 D_b 将用边长为 $1/2^n$ 的封闭正方盒子覆盖 S 若 S 中包含的小方盒数量 $M(n)$, 则计盒维数为:

$$D_b = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log M(n)}{n \log 2} \quad (5)$$

除上述定义的几种分形维数外,还有谱维数、模糊维数、拓扑维数、广义维数、微分维数、分配维数、质量维数、填充维数等。

2 分形理论的应用

分形理论自从它诞生那一天开始就和应用研究密不可分,它的应用范围非常广泛,从大分子到宇宙星系,从自然科学到社会科学,凡是具有自相似性的现象就有分形存在。以下列举一些在各个学科领域中的应用情况。

2.1 在工程技术中的应用

2.1.1 分形理论在摩擦学中的应用 分形理论在摩擦学中主要用于粗糙表面的表征、接触模型分析、磨合磨损预测、摩擦温度分布以及磨屑的定量分析等领域。粗糙表面接触的分形模型有由 Majumda 和 Bhushan 等基于 $W-M$ 分形函数提出的 $M-B$ 分形模型以及由 Warriner 和 Thomas 等以 Cantor 集抽象近似提出接触模型^[3]。

2.1.2 分形理论在疲劳断裂分析中的应用 在疲劳裂纹的断裂分析中,通常假定裂纹是平直扩展的。然而大量实测表明,疲劳裂纹扩展路径通常是不规则的,产生粗糙断裂表面裂纹的不规则扩展导致疲劳断裂行为(有效应力强度和有效裂纹扩展速率)显著的变化。应用分形几何实现定量描述疲劳裂纹扩展路径,建立裂纹扩展的分形模型^[9],可以更好地探讨裂纹扩展对疲劳行为的影响,研究表明,分形裂纹扩展使应力强度范围低于外加应力强度范围,实际裂纹扩展速率大于表观裂纹扩展速率^[4]。

2.1.3 分形理论在故障诊断中的应用 目前,将分形理论应用于故障诊断主要有 2 个途径:一是提取磨屑的分形特征,根据磨屑的分形维数,间接获得机器的磨损率,为机器在线故障诊断、预测磨损状态提供依据;二是测量机器运行的特征信号,从中提取信号的分形特征(分维数),基于分维数分析机器的故障状态。分形几何在机械故障诊断的以下几个方面值得探讨:(1)机械运行状态的异常判别;(2)机械故障的分类与诊断;(3)反映

机械运行状态的特征参数个数的选取^[5]。

2.1.4 其它方面 分形在复杂产品的分形设计、有限元网格划分的递推模型、制造决策映射建模等方面也有应用。

2.2 在物理学中的应用

物理系统本质上是非线性的,但当今的牛顿力学和量子力学对于非线性问题还是无能为力。分形学的问世给物理学的研究注入了新的活力,因而分形在物理学中得到了广泛的应用,其中比较成功的应用包括以下方面。

在分形凝聚^[9]方面,人们提出的具有多重分形的受限扩散凝聚(DLA)模型和动力学集团凝聚(KCA)模型,如悬浮于气体中的固体颗粒或液体颗粒的凝聚、电解液中金属的电沉积、准晶体的生成、流体在多孔介质中的渗流等。在固体物理方面,用于准晶态的扩散等。用于薄膜的研究,如在气相物理沉淀、非晶态薄膜的晶化、溶液膜中的晶体生长、液体界面上的电解沉淀、气态电解质膜中的电击穿等过程中都可出现分形图样。分形理论已用于纳米半导体薄膜、超薄薄膜、各种薄膜生长和超薄金属膜(只有一个或几个原子层的薄膜)生长的研究之中。用于湍流的研究^[7],分子光谱(分子线谱和分子能量状态具有分形结构)、电磁散射(由于粗糙分形表面引起的)、材料断裂表面和边界、以及碎块的大小和频度具有分形规律,材料力学行为和材料弹塑性断裂研究。在粒子物理中的应用,高能粒子碰撞中的阵发现象具有分形结构,分形理论用于解释碰撞的机制,为粒子物理打开一个新的领域。

在流体粘性指进现象中的应用,粘性指进是指两种具有不同粘性的流体相遇时,在其界面形成的具有分形结构的奇特形状,该形状与受限扩散凝聚(DLA)模型相似。在放电式样研究中的应用、相变分析。超微粒及其聚集体,及其在粒径、熔化、磁性、电导及生长过程中均具有分形特征。在非线性光学中,如在激光非线性薛定谔方程、相干态、波色及光场理论、可积系统理论、不可积哈密顿系统中的随机层、随机海和随机网等领域取得了很多成果。

另外,有人对超导现象研究后发现,材料微观结构的分形维数与其超导电性密切相关。分形学也用于布朗运动分析、非晶态半导体的研究、引力波的研究、电子在固体中的散射、多孔介质中的声传播、激光全息防伪等领域。

以上方面是分形在物理学有关领域的应用概况。分形在物理学中的应用包括理论研究和实际应用两方面。目前,理论研究已逐渐成熟起来,人们更加注重把理论研究成果用于各门工程技术中。例如电磁散射应用于远航通讯、雷达回波中。分形在超导研究、各种薄膜研究、包括纳米材料在内的新材料研制等方面将会发挥更大的作用。

2.3 在化学中的应用

在多相催化体系中的应用,催化剂颗粒是一个分形体,不仅疏松的衬底和分布在其上作为催化物质的颗粒表面可以用分维表征,而且起主要催化作用的颗粒的亚微观结构也具有分形特征。反应前后,催化物质几何构形的改变,可以通过测定分维来研究。催化剂表面的分维与它的催化特性有密切的联系,研究表明,在分形介质中进行分散和反应都与表面分维数有关。这说明,分维D值反映了催化剂的选择性、活性及活性位置在催化表面上的分布等信息。此外,分形理论还在生物催化方面有应用^[8]。

在宏观化学动力学^[9]方面,远离平衡态的化学过程往往产生具有分数维的表面结构,其中研究得比较详尽的就是扩散控制沉积模型(简称DLA模型),提出了一些相应的简化模型,用来模拟传热,传质以及界面生长等过程。李后强^[10]等提出了“酶分形动力学”概念,并建立了相应的理论体系。

在颜料表面改性方面的应用,颜料粒子的表面形貌是一个影响颜料性能的很重要的因素,研究结果表明,表面分形维数、粒子表面形貌与颜料某些性能之间确实存在很好的对应关系,从而使颜料粒子表面形貌得以量化表征,并使颜料粒子表面分形维数与颜料的某些性能相关联成为可能。

目前,分数维方法在化学中各个领域的应用也正在开展之中。例如:沉积物的形成、表面吸附、高分子溶液、晶体结构以及高分子凝胶等方面,也有少数学者开始研究小分子运动以及大分子构象等问题。此外,薄膜分形、断裂表面分形以及超微粒聚集体分形等领域的研究已日趋活跃,在准晶和非晶态固体的描述、气固反应模型等也有应用。

2.4 在生物医药中的应用

2.4.1 药学 分形学在药学领域的应用以药剂学最吸引人。在药物剂型设计、剂型定性、生产中

的单元操作和药物释放性能等方面均有成功应用。如用分形维数表征粉粒状药物、多孔固体制剂、混悬剂和乳剂、气溶胶、微乳剂等结果,可更好地研究药剂表面结构与药物性能的关系。在生物药剂学和药物动力学也有许多潜在用途,如用分形表示药物溶出动力学曲线、分形反应维数在药物膜通透速率中的应用、吸附剂表面吸附程度以及血药水平和尿排泄曲线等^[11]。

2.4.2 医学 生理学方面,各种组织和器官在微观结构上是分形的,同样组织中发生的功能性事件也具有非线性动力学特征,即是混沌的。混沌是一种有限制的随机,与分形几何学相关。分形和非线性动力学的概念提供了一种描述由于疾病或药物毒性导致的功能失调以及药理学中常遇到的许多现象的灵敏方法。如药物—受体相互作用、细胞膜表面的分形维数及离子通道动力学模型、跨膜转运、神经系统和功能、生物反应器^[12]。

2.4.3 食品科学与工程 分形在食用和药用植物的选用、凝聚、结晶及过滤等单元操作、农产品分级、食品或农业物料特性等相关领域的应用^[13]。

2.4.4 植物学 植物中树、枝、叶、茎、花、草、蕨、花椰菜等是自然界中最先被认知具有分形维数的物体。此外,在农林业中,如生态学、林火初期蔓延、树木动态过程分析、木材科学及工艺、冠层结构特征描述、林业遥感图像中的文理分析、植物形态模拟、树木特征数据库的建立等相关研究^[14]。

2.5 在材料科学中的应用

分形可以用于材料制备和材料断裂行为等研究^[15-16]。用于材料磨损表面、材料断裂表面、材料烧结与氧化过程、薄膜材料等方面的分析研究。分形学用于描述断口的特征,研究表明断口的分形维数是与宏观力学的某些参量密切相关,材料微观结构的分形维数与其超导电性密切相关。可以用分形维数的大小来区分材料的加热程度,晶体和非晶体的表面都可以用分形表面来描述。

2.6 在水文、地理学中的应用

分形理论已广泛用于解释和分析复杂的天文、水文、地质、地理等领域。

在气象学领域^[17],分形用于研究云系的形状、气象卫星云图的特征和数据压缩,降水的模式和强度,降水量在土壤中的渗透模式等。

在水文领域^[18],用于研究河流形态、洪涝干旱序列、水文过程线(如水位、流量、含沙量等)等

的形状特征。

在地貌学领域^[19-20],运用分形理论研究地表面的起伏,例如山川、地形、地貌的形态,以及它们产生、发展、分布的规律等,已经形成了分形地貌学(fractal geomorphology)这一地貌学新的分支,它不仅以分形理论为基础对地表面(特别是山地表面)的形态进行了描述,进而以分维为中介参数建立山地起伏等地貌现象与其内部机制之间的联系。除此之外,分形地貌学还大量探讨了山系、断层系的空间展布以及喀斯特洼地、滑坡的稳定性、地表水系、地下渗流、海岸线、湖泊、湖岸线等的分形性质。同时,运用分形布朗运动随机分形生成逼真景物的方法,可以逼真地模拟各种各样的自然景观,如山地起伏、山脉的形状以及海岸线、湖岸线、河流等自然界现象。

在人文地理学领域^[21],分形理论可以用于研究类似于海岸线的城市边界线、城市等级体系、城市规模分布、城市引力模型以及区域差异等的分形特征;另外,城市道路网的分布和交通控制、城市商业网点的布局、城市人口的分布以及城镇土地利用类型的空间展布等,也都表明具有分形性质。此外,分形理论还在沙漠定量化研究、长江水系沉积物重金属含量空间分布特征、旅游景观的设计布局以及与矿床分布、油田井位的位置和储量的确定等方面也做出了实际性的探索和应用。

此外,在灾害学领域,滑坡、泥石流等山地灾害的发生、旱涝灾害的发生、地震的发生时间和强度、灾害性海潮的发生、历代灾害造成的伤亡人数、受灾地区的分布及面积大小、灾害造成的经济损失等都被揭示出是具有分形性质的。

2.7 在经营管理学中的应用

分形学在经济和管理学领域的应用,已经形成了分支学科—非线性经济学。

在股票、证券市场的应用^[22-23],如用于分形市场假设、股票证券价格和收益的波动规律、证券市场交易数据的变化趋势等分析。

在管理科学^[24]中有许多应用,如在企业管理学、城市管理学、分形管理学等方面。此外,在经济弹性、国民收入、资本和财产的分布、经济刺痛变化趋势预测、经济混沌及经济奇异吸引子的分维测度、经济时序动力系统、人口学等方面也有应用。

2.8 在计算机图形学中的应用

分形在计算机图形学中的应用广泛。如迭代

函数系统产生无穷多的分形图可以用于图案设计^[25]、创意制作、计算机动画、实物模拟仿真、装饰工程^[26]等具有广泛的应用价值, 分形用于压缩图像信息时图像信息的提取和识别^[27]、纹理图像分割、分形图像编码^[28]等方面, 都取得了很好的效果。

3 分形理论的发展前景

分形学自 70 年代初创立以来, 国内外发展很快, 从自然科学到社会科学都有了广泛的应用和研究, 并且取得了一定的效果, 对许多难题做出独特的解释, 给出了解决难题的途径, 所以, 分形学的发展前景是非常光明的。

随着分形理论在各个领域应用不断的发展, 分形理论本身的数学基础也面临着不断发展的问 题, 只有将分形理论和其应用相结合, 同步发展, 才能使之逐渐形成一门系统理论。

参考文献:

[1] Mandelbort B B The Fractal Geometry of Nature[M] New York: Freeman 1983

[2] 陈建安. 分形维数的定义及测定方法[J]. 电子科技, 1999 4: 44—46

[3] 陈国安, 葛世荣, 王军样. 分形理论在摩擦学研究中的应用[J]. 摩擦学学报, 1998 18(2): 179—184

[4] 谢和平, 黄约军. 分形裂纹扩展对材料疲劳行为的影响[J]. 机械强度, 1996 18(1): 1—5

[5] 蒋东翔, 黄文虎, 徐世昌. 分形几何及其在旋转机械故障诊断中的应用[J]. 哈尔滨工业大学学报, 1996 28(2): 27—31.

[6] 徐志君, 朱启鹏, 吴锋民. 扩散—反应置限分形凝聚模型[J]. 大自然探索, 1998 17(2): 81—82

[7] 黄真理. 湍流的分形特征[J]. 力学进展, 2000 30(4): 581—596

[8] 郭从容, 杨桂琴, 王雪松, 等. 分形理论及其在化学和化工中的应用[J]. 化学工业与工程, 1999 16(1): 33—38

[9] 万 荣, 李如生. 分形介质上的化学动力学[J]. 化学通报, 1996 (7): 1—6

[10] 李后强, 汪富泉. 分形理论及其在分子科学中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 1993

[11] 王 晋, 王家权. 分形几何学在药学及相关领域的应用[J]. 中国医药工业, 2000 (9): 423—428

[12] 张红新, 张云汉, 黄长征. 分形和分形维数及其在医学形态学领域的应用. 1998 3(3): 189—192

[13] 马海乐. 分形理论在食品科学与工程中的应用[J]. 中国粮油学报, 1998 13(1): 8—11.

[14] 赵茂程, 高素萍, 潘一凡, 等. 分形理论及其在林业中的应用与研究进展[J]. 世界林业研究, 2002 15(2): 28—34

[15] 王 慧, 曾令可. 分形理论及其在材料科学中的应用[J]. 材料开发与应用, 2000 15(5): 39—43

[16] 文洪杰, 彭达岩, 王资江, 等. 分形理论在材料研究中的应用和发展[J]. 钢铁研究学报, 2000 12(5): 70—73

[17] 张建伟. 气象卫星云图的分形编码研究[J]. 南京气象学院学报, 1998 21(3): 328—335

[18] 刘德平. 分形理论在水文过程形态特征分析中的应用[J]. 水利学报, 1998 (2): 20—25

[19] 艾南山, 陈 嵘, 李后强. 走向分形地貌学[J]. 地理学与国土研究, 1999 15(1): 92—96

[20] 李 锰, 朱令人, 龙海英. 分形在地貌学中的应用的几个问题的分析[J]. 地震研究, 2002 25(2): 155—162

[21] 岳文泽, 徐建华, 司有元, 等. 分形理论在人文地理学中的应用研究[J]. 地理学与国土研究, 2001 17(2): 51—56

[22] 舒建平, 谭德庆, 吴 炯. 中国股票市场分形结构探索[J]. 西南交通大学学报, 2003 38(2): 212—215

[23] 林 勇. 分形及其在证券市场中的应用[J]. 经济问题, 2001 (8): 44—46

[24] 彭正新, 李传昭, 李 华. 知识经济时代企业分形管理模型的研究[J]. 商业研究, 2002 255(10): 33—35

[25] 王小铭. 计算机辅助分形艺术图案设计的算法造型技术[J]. 华南师范大学学报(自然科学版), 2003 (1): 46—50

[26] 陈萧枫, 蔡秀云. 分形图在装饰工程中的应用[J]. 工程图学学报, 2001 (3): 114—119

[27] 李望超. 分形图像压缩的研究进展[J]. 河北科技大学学报, 2001 22(4): 1—3 16

[28] 赵 耀, 王红星, 袁保宗. 分形图像编码研究的进展[J]. 电子学报, 2000 28(4): 95—101 106